ЕЛЕКТРИКА І МАГНЕТИЗМ

1. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ. НАПРУЖЕНІСТЬ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ

Зміст

1.1.Електричні заряди, їх основні властивості

Електромагнітна взаємодія – це взаємодія тіл зумовлена їх особливим станом – електризованості (зарядженості).

Міру здатності тіл до електромагнітної взаємодії називають електричним зарядом.

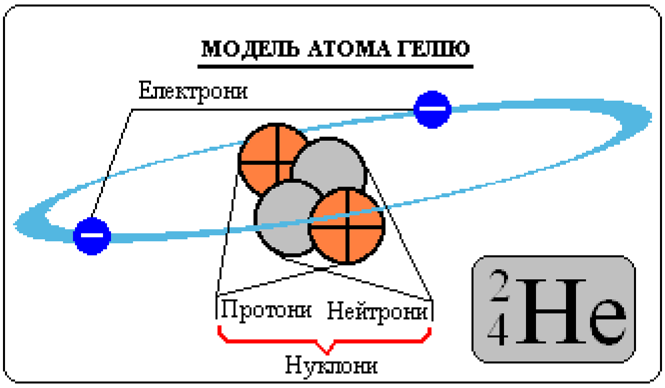
Спостереження виявляють два види електричних зарядів. Один з видів умовно назвали позитивним, інший – негативним.

Корені назв, пов'язаних з електричними явищами, походять від давньогрецького слова ἤλεκτρον – «електрон» – бурштин (янтар), оскільки особливу увагу давніх греків привертала взаємодія шматочків бурштину потертих хутром. Те, що в деяких випадках, тіла потерті шкірою, або хутром, набувають здатності притягувати дрібні клаптики тканини, а також взаємодіяти між собою, було помічено ще за давніх часів. Подібні явища і отримали назву електричних. Назви зарядів запропоновані Бенджаміном ФРАНКЛІНОМ (17.01.1706 – 17.04.1790, США) та Георгом Крістофом ЛІХТЕНБЕРГОМ (01.07.1742 – 24.02.1799, Німеччина). Франклін причиною позитивного заряду вважав нестачу «електричної рідини», позитивного – надлишок її.

Однойменно заряджені тіла відштовхуються, різнойменно – притягуються.

Історично склалося так, що за пропозицією Франкліна *позитивним зарядом названо заряд однойменний зі зарядом скляної палички потертої хутром.*

Оскільки головною структурною одиницею речовини є атом, то зарядити тіло означає зарядити атоми тіла.



Атом має ядро, до складу якого входять позитивно заряджені частинки – *протони* та незаряджені частинки приблизно такої ж маси – *нейтрони.*

Числу протонів в ядрі відповідає таке ж число негативно заряджених електронів, що рухаються навколо ядра.

Так як атом електронейтральний, то, очевидно, заряд електрона рівний і протилежний заряду протона.

Вибір назв зарядів зроблений першими дослідниками електричних явищ не можна назвати вдалим, так як заряд електрона, який зумовлює електричний струм в металах, автоматично був названий від'ємним, що створило певні незручності при опису явищ пов'язаних з напрямком електричного струму.

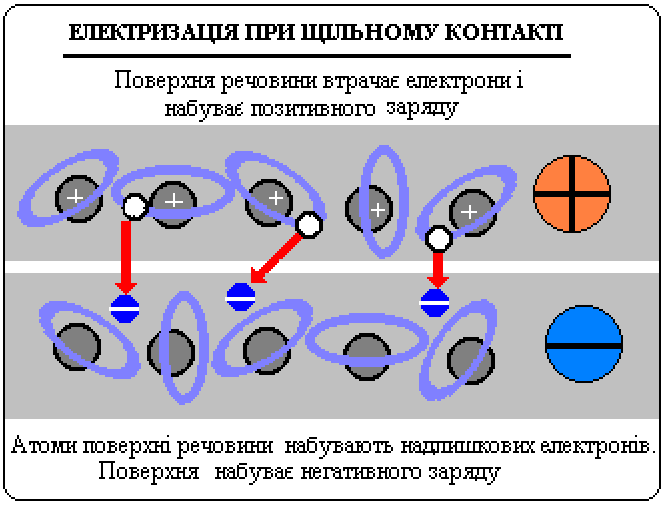
Зарядити атом – означає порушити баланс між числом протонів і електронів.

Оскільки склад ядра змінити в звичайних умовах неможливо, то процес зарядки атома зводиться до втрати ним електронів, або набуття надлишкових

Таким чином *означення заряду тіла зводиться до означення заряду атомних частинок – електрона та протона.*

Єдиним, що можна напевно сказати з цього приводу, є те, що *заряд електрона та протона це їх невід'ємна властивість, яка служить мірою здатності цих частинок до електромагнітної взаємодії*. Зарядом характеризуються також деякі інші частинки мікросвіту.

Що стосується тіл, то в підсумку слід відзначити, що *позитивно заряджене тіло має недостачу електронів, а негативно заряджене – їх надлишок.* В побуті можна часто спостерігати електризацію тіл при взаємному терті їх поверхонь. Таку електризацію відносять до контактних. *Контактна електризація* пояснюється переходом електронів від атомів поверхні одного тіла до іншого, атоми якого сильніше зв'язують електрони.



Притирання поверхонь тіл сприяє збільшенню площі контакту і більшої щільності прилягання. Для ефективної електризації поверхні повинні наблизитись до відстані порядку атомних розмірів.

Тіла можуть набувати заряду також в результаті дії опромінення, яке здатне виривати з них електрони (*фотоелектронна емісія, або фотоефект*), або в результаті підвищення температури, при якому електрони масово вилітають з поверхні тіл (*термоелектронна емісія*) та в інших випадках.

Величина заряду позначається буквами q, або Q, і може бути додатною, або від'ємною.

В результаті збереження різниці між числом позитивних і негативних атомних частинок тіла виконується *закон збереження електричного заряду, за яким алгебраїчна сума зарядів ізольованої системи тіл зберігається сталою*.

$$q_1 + \cdots + q_n = \text{const},$$

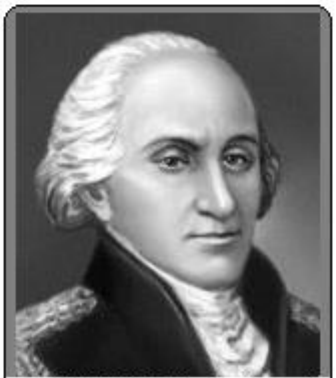
$$q_1^{|} + \cdots + q_n^{|} = q_1 + \cdots + q_n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i^{|} = \sum_{i=1}^{n} q_i\ .$$

1.2.Закон взаємодії заряджених тіл Кулона

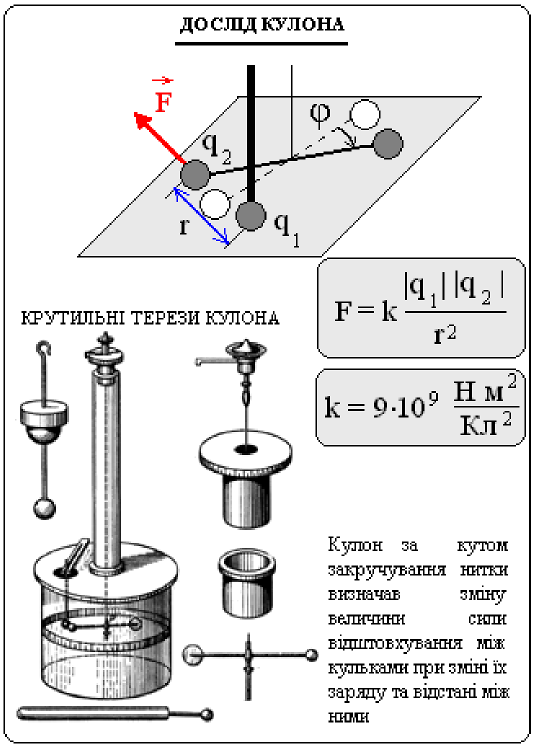
Заряджене тіло, розмірами якого можна знехтувати, коротко називається *точковим зарядом*.

Закон взаємодії точкових зарядів встановив Шарль-Огюстен де КУЛОН (Франція) шляхом вимірювання залежності силі взаємодії заряджених кульок від величини їх заряду та відстані між ними.



de COULOMBE Charles-Augustin
КУЛОН Шарль Огюстен
14.06.1736-23.08.1806

Такі вимірювання були проведені за допомогою крутильних терезів, що являють собою рівноплечий важілець з кульками на кінцях, закріплений на пружній кварцовій нитці. За кутом закручування, який прямопропорційний силі, що закручує нитку, можна визначити, як змінюється сила взаємодії між кульками.



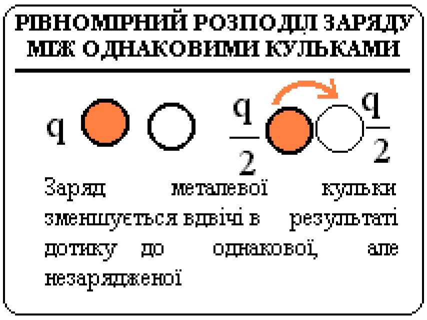
Було помічено, що сила відштовхування зростає у стільки ж разів у скільки зростає заряд однієї або другої кульки при однаковій відстані між ними. Зменшення відстані приводить до зростання сили в оберненій пропорціональності квадрату відстані.

На основі дослідів з крутильним терезами Кулон встановив закон взаємодії заряджених тіл, за яким *сила взаємодії двох нерухомих, точкових заряджених тіл у вакуумі прямопропорційна добутку величин їх зарядів, оберненопропорційна квадрату відстані між ними та направлена по прямій, що їх з'єднує*.

Силу, що визначається законом Кулона, називають *кулонівською*. Замість слів «точкові заряджені тіла» стисло кажуть «*точкові заряди*».

При відсутності середовища, що розділяє точкові заряди Q та q, розташовані на відстані r, кулонівська сила F_0 запишеться

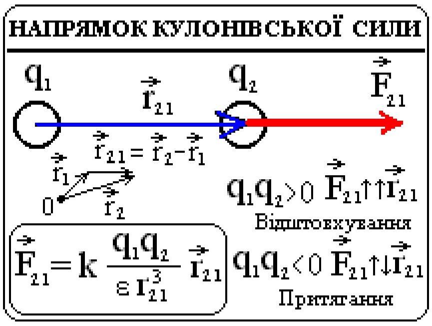
$$F_0 = k\frac{|Q||q|}{r^2}.$$



Векторно

$$\vec{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r_{21}^3}\vec{r}_{21},$$

де $\vec{F}_{21}$– сила, що діє на другий заряд з боку першого, $\vec{r}_{21}$ – вектор напрямлений до другого заряду від першого, а $\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} = \vec{e}_r$– одиничний вектор у вказаному напрямку.



Якщо положення зарядів визначається радіус-векторами відповідно r_2 та r_1, то

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Для оперування кулонівською силою слід встановити спосіб вимірювання заряду та визначити коефіцієнт пропорційності k.

Так, в *системі СІ одиниця заряду (кулон, позначається Кл)* є похідною від одиниці струму (ампер, позначається А).

Про вибір одиниці величину струму мова йтиме вище, тут достатньо вказати, що за 1 *ампер* приймають струм, при якому два певні провідники за певних умов взаємодіють з певною силою.

Тоді *одиниця заряду – кулон* (Кл) означиться як *заряд, що проходить через поперечний переріз провідника з струмом 1 А за 1 с.*

У відповідності до формули q = It, можна записати

$$Кл = А\ с.$$

На основі означення одиниці заряду можна вимірювати його величину.

Наприклад, величину заряду кульки в принципі можна виміряти, розряджаючи її на Землю, за відхиленням стрілки особливо чутливого амперметра (гальванометра).

Вимірявши силу взаємодії кульок та відстань між ними, можна за формулою закону Кулона обчислити коефіцієнт пропорційності k

$$k = \frac{F_0 r^2}{|q||Q|} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{\text{Нм}^2}{\text{кг}^2}.$$

Примітка. В деяких підручниках застосовуються також інші системи одиниць вимірювання. В системі одиниць СГС, запроваджeній К.Ф. Гауссом, одиниця заряду є основною і встановлюється на основі закону Кулона, який записується так:

$$F_0 = \frac{\sqrt{k}\,|q_1|\sqrt{k}\,|q_2|}{r^2} = \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2}.$$

Виходить, що k = 1. Це означає просте збільшення одиниці вимірювання заряду в $\sqrt{k}$ разів в порівнянні з величиною, продиктованою дослідною формулою кулонівської сили.

Ясно, що $Q_1 = Q_2 = 1$ при $F_0 = 1$, r = 1.

Таким чином, *одиниця заряду в системі СГС* – це заряд, при якому два нерухомих точкових заряджених тіла у вакуумі на відстані I см, взаємодіють з силою I дина.

Знайдемо зв’язок кулона і одиниці заряду СГС (СГСq). Для цього розрахуємо силу кулонівської взаємодії зарядів по I Кл кожний в системі СI і СГСЕ на відстані 1м.

Нехай 1 Кл = x СГСq , тоді в СI $F_0 = k\frac{1^2}{1^2} = 9 \cdot 10^9\,(\text{Н})$, в СГСЕ $F_0 = \frac{x^2}{10^4}$ дн (враховано, що 1м = 10^2 см).

Оскільки 1 дн = 10^{-5} Н, то, прирівнявши сили, матимемо

$$1 \text{ Кл} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГС q}.$$

Відношення кулонівських сил взаємодії у вакуумі та непровідному середовищі (діелектрику), називається діелектричною проникністю середовища (ε)

$$\varepsilon = \frac{F_0}{F},$$

звідки

$$F = \frac{F_0}{\varepsilon}.$$

Модуль сили кулонівської взаємодії в середовищі запишеться

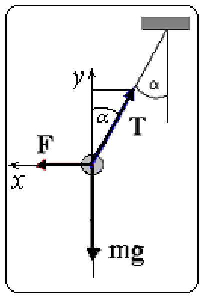
$$F = k\frac{|Q||q|}{\varepsilon r^2}.$$

Діелектрична проникність враховує вплив середовища на силу електричної взаємодії. Для прикладу, електрична проникність гасу рівна 2, скла 5, дистильованої води 81. Причина впливу середовища на силу електричної взаємодії буде розглянута пізніше.

Приклади

1. Дві однакові кульки підвішені в повітрі на нитках так, що їхні поверхні стикаються. Після того, як

кожній з кульок був наданий заряд $q = 10^{-7}$ Кл, кульки розійшлися на кут $2\alpha = 60°$. Знайти масу кульок, якщо відстань від точки підвісу до центра кожної кульки $l = 0,2$ м.



Відповідь. $m = k\dfrac{q^2}{gl^2 tg\alpha} \approx 0,4г$.

Розв'язання.

1) Спосіб.

Записавши рівняння рівноваги однієї з кульок в проекціях на горизонтальну та вертикальну осі матимемо

$$-T\sin\alpha + F = 0,$$

$$T\cos\alpha - mg = 0,$$

де

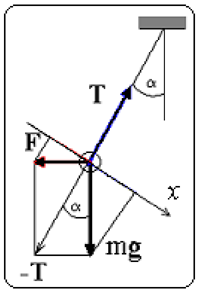
$$F = k\frac{q^2}{l^2}.$$

З цих співвідношень

$$m = k\frac{q^2}{gl^2 tg\alpha} \approx 0,4г.$$

2) Спосіб.

З діаграми сил , що виражає умову рівноваги кульки



$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$, або $m\vec{g} + \vec{F} = -\vec{T}$,

маємо: $\dfrac{F}{mg} = tg\alpha$, звідки після підстановки сили знаходиться *m*.

3) Спосіб.

З умови рівноваги кульки для проекцій сил на вісь перпендикулярну до нитки:

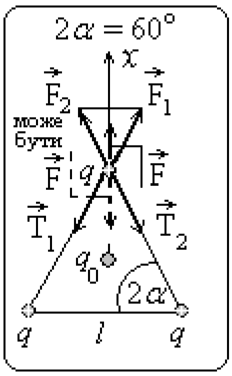
$mg\sin\alpha - F\cos\alpha = 0.$

Далі викладки аналогічні попереднім.

2. Три однакових позитивних заряди $q = 10^{-7}$ Кл розташовані у вершинах рівностороннього трикутника і зв'язані нитками довжиною l = 30см. У центрі трикутника поміщений заряд q_0. Яку величину має заряд q_0, якщо відомо, що натяг усіх ниток однаковий і дорівнює T = 60 динам?

Відповідь.

$$q_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{Tl^2}{kq} - q\right) = -0,538\cdot 10^{-7}\,Кл.$$



Розв'язання.

В загальному випадку слід розглядати варіанти позитивного та негативного заряду в центрі трикутника і два можливих напрямки сили *F*, що діє з боку цього заряду. З рівняння рівноваги для одного із зарядів в проекціях на бісектрису кута

$$2F\cos\alpha - 2T\cos\alpha \pm F_0 = 0.$$

$$2k\frac{q^2}{l^2}\frac{\sqrt{3}}{2}-2T\frac{\sqrt{3}}{2}\pm k\frac{3q\,|\,q_0\,|}{l^2}=0\,.$$

Звідси

$$\pm|\,q_0\,|=\frac{\sqrt{3}}{3}(\frac{Tl^2}{kq}-q)\,.$$

Підстановка числових значень показує, що центральний заряд – від'ємний.

Матимемо $|\,q_0| \approx 0{,}538\cdot10^{-7}$ Кл.

Завдання

1. Дві однакові кульки, які підвішені на нитках однакової довжини, під дією наданого їм заряду розійшлися на кут $\alpha = 90^0$. Через деякий час вони зближаються до кута $\beta = 60^0$. Визначити, яку частку початкового заряду втратила кожна з кульок.
2. Дві однакові заряджені кульки, що знаходяться в гасі і підвішені до одного гачка на нитках довжиною l = 50 см, розійшлися на відстань r = 50 см. Заряди кульок однакові і рівні q = $10^{\ 7}$ Кл. Яка густина матеріалу кульок ρ якщо їхній радіус R = 1 см? Діелектрична проникність гасу ε = 2. густина гасу ρ_0 = 0,8 г/см^3. Прискорення вільного падіння вважати рівним g = 10 м/с^2.

1.3.Електричне поле. Напруженість електричного поля

1^0.Напруженість електричного поля

З точки зору *теорії далекодії (польової теорії)* взаємодія двох зарядів полягає в тому, що навколо кожного заряду існує електромагнітне поле, яке діє на інший заряд.

Можна означити *електромагнітне поле, як посередника, що здійснює електромагнітну взаємодію, тобто, такий* вид матерії, *в кожній точці простору якого виявляється дія електромагнітних сил.* Взаємодія заряджених тіл пояснюється тим, що навколо зарядженого тіла існує електромагнітне поле, яке діє на інші заряджені тіла в кожній точці цього поля.

Електромагнітне поле має дві складові: електричну (*електричне поле*) та магнітну (*магнітне поле*).

З цих позицій *електричне поле – це електромагнітне поле в особливих умовах спостереження (коли магнітна складова не спостерігається*).

Таким полем є *поле нерухомих зарядів, яке також називають електростатичним*.

З означення зрозуміло, що виявити і дослідити поле в даній точці можна за допомогою визначення сили, що діє на пробний заряд в цій точці.

Пробний заряд – це заряд достатньо малий за величиною та геометричними розмірами, щоб не спотворювати досліджуваного поля.

Нехай джерелом поля є точковий заряд Q. На пробний заряд q в цьому полі діятиме електрична (кулонівська) сила, величина якої визначається законом Кулона.

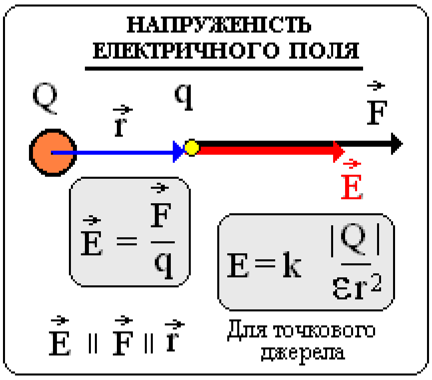
$$F = k\frac{|Q||q|}{\varepsilon r^2}.$$

З формули сили випливає, що відношення сили, яка діє на заряд в даній точці поля до величини цього заряду для даної точки поля даного джерела є величиною сталою, яка називається *напруженістю електричного поля*.

Напруженість служить точковою силовою характеристикою будь-якого поля, не тільки кулонівського.

Отже, *напруженість довільного електричного поля*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (q = \pm|q|).$$



Після підстановки в останню формулу кулонівської сили, матимемо *напруженість електричного поля точкового джерела* (поля кулонівських сил)

$$\vec{E} = k\frac{Q}{\varepsilon r^3}\vec{r},$$

де $\vec{r}$ – радіус - вектор проведений з точки джерела до точки спостереження. Модуль даного вектора напруженості

$$E = k\frac{|Q|}{\varepsilon r^2}.$$

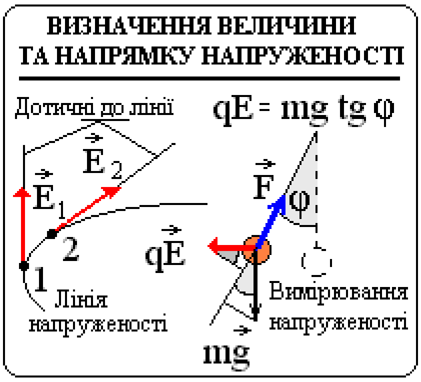
Одиниця напруженості поля в СІ виразиться через одиниці сили та заряду

$$[E] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$$

Напруженість дозволяє знайти електричну силу, яка діє на точковий заряд, за напруженістю поля

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

2^0.Прнцип суперпозиція полів



За означенням, яке виражає дослідний факт, для будь-якої сили, а, отже, і електричної, справджується ***принцип суперпозиції*** у вигляді правила додавання сил, зумовлених різними діями.

Електрична сила, що діє на заряд в даній точці, рівна сумі сил, що діють з боку всіх джерел поля взятих окремо

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \cdots + \vec{F}_n .$$

Також

$$q\vec{E} = q\vec{E}_1 + \cdots + q\vec{E},$$

або

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \cdots + \vec{E},$$

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i .$$

Отже *принцип суперпозиції електричних полів* стверджує, що *напруженість поля системи електричних зарядів рівна сумі напруженостей полів кожного заряду взятого окремо.*

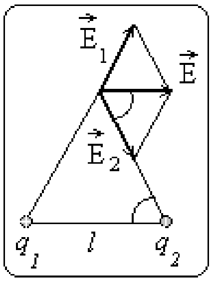
Зауваження

Цікаво, що Земля має значний негативний електричний заряд, якому відповідає рівний позитивний об'ємний заряд розподілений в атмосферному шарі товщиною порядку десятка кілометрів. На висоті біля 10 – 20 км напруженість електричного поля практично рівна нулю. Біля поверхні Землі напруженість становить біля130 Н / м^2, що відповідає заряду Землі 0,8 МКл.

Приклади

1. На відстані l = 10 см у вакуумі розташовані два різнойменні точкові заряди однакової величини q = 1,5·10 – 9 Кл. Знайти напруженість електричного поля в точці, що відстоїть від обох зарядів на l =10 см.

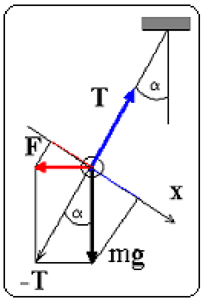
Відповідь. $E = k\frac{|q|}{l^2}$; E = 1350 Н /Кл.



Розв'язання. З діаграми додавання векторів напруженості видно, що доданки та сума утворюють рівносторонній трикутник. Тому $E = E_1 = E_2 = k\frac{|q|}{l^2}$.

2. Маленька кулька з масою m = 1 г і зарядом q = 10^{-6} Кл підвішена на непровідній нитці, яка в однорідному горизонтальному електричному полі відхиляється на α = 30^0 від вертикалі. Знайти напруженість E електричного поля.

Відповідь. $E = \frac{mg \cdot tg\alpha}{|q|}$; E =5,66·10^3 Н / Кл.



Розв'язання.

1) Спосіб. З діаграми сил , що виражає умову рівноваги кульки

$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$, або $m\vec{g} + \vec{F} = -\vec{T}$,

маємо: $\frac{F}{mg} = tg\alpha$, або $\frac{|q|E}{mg} = tg\alpha$, звідки $E = \frac{mg \cdot tg\alpha}{|q|}$ = 5,66·10^3 Н/Кл.

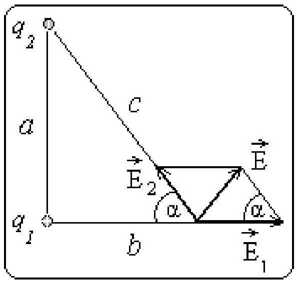
2) Спосіб. З умови рівноваги кульки для проекцій сил на вісь перпендикулярну до нитки:

$mg \sin\alpha - F\cos\alpha = 0$.

Далі викладки аналогічні попереднім.

3. На кінцях катету прямокутного трикутника довжиною a = 6см розташовані заряди q_1 = 2мкКл та q_2 = – 3 мкКл. Знайти напруженість електричного поля E в третій вершині трикутника, якщо довжина його гіпотенузи становить c = 10см.

Відповідь. $E = 29{,}2 \cdot 10^3$ Н/Кл.

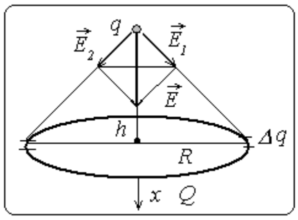


Розв'язання. З діаграми додавання векторів напруженості за теоремою косинусів $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\alpha}$, де $E_1 = \dfrac{k\,|q_1|}{c^2 - b^2}$, $E_1 = \dfrac{k\,|q_2|}{c^2}$.

4. Маленька металева кулька, заряд якої q = 40 од. СГСЕ, а маса m = 2г падає по осі рівномірно зарядженого тонкого кільця. Яке прискорення кульки в точці, розташованій на h = 0,6 м вище площини кільця, якщо заряд кільця $Q = -10^{-5}$ Кл радіус кільця R = 0,8 м?

Відповідь. a =10,16 м / с^2.

Розв'язання. Напруженість поля кільця рівна сумі напруженостей поля всіх малих елементів, які можна вважати точковими $\vec{E} = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{E}_i$. Як показує діаграма додавання, сума напруженостей поля двох протилежних малих елементів кільця напрямлена по прямій, що проходить через центр кільця. Оскільки кожному елементові кільця зарядом Δq відповідає діаметрально протилежний, сума напруженостей всіх малих елементів кільця теж має бути того ж напрямку. Для проекцій на напрямок загальної напруженості матимемо.

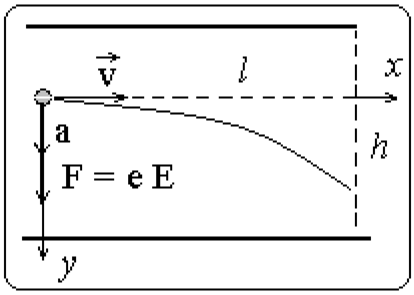


$$. E = \sum_{i=1}^{n} E_{ix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k\,|\Delta q\,|}{R^2 + h^2}\cos\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{k\,|\Delta q\,|}{R^2 + h^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} = \frac{kh}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \sum_{i=1}^{n} |\Delta q\,| . \ E = \frac{k\,|Q|\,h}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

За другим законом Ньютона $a = \dfrac{mg + |q|E}{m} = g + \dfrac{|q|E}{m} = 10{,}16$ м /с^2

5. Електронний промінь, проходячи між обкладинками конденсатора шлях *l* = 5 см, відхиляється на h = 1 мм. Визначити середню швидкість електронів у промені. Напруженість електричного поля між обкладинками конденсатора E = 150 В/м. Заряд електрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, маса електрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Відповідь. $v_0 = 5{,}74 \cdot 10^{6}$ м/с.



Розв'язання. За рівняннями координати рівноприскореного руху $l = vt$, $h = \dfrac{at^2}{2}$.

За другим законом Ньютона $a = \dfrac{F}{m_e} = \dfrac{eE}{m_e}$.

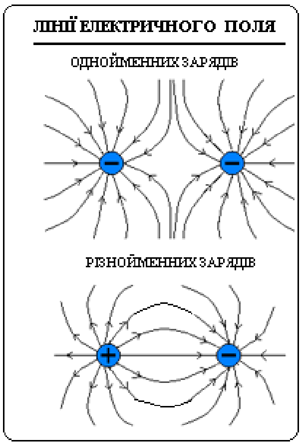
З цих рівнянь $v_0 = l \cdot \sqrt{\dfrac{eE}{2hm_e}}$,$v_0 = 5{,}74 \cdot 10^{6}$м / с.

3^0.Графічне зображення електричного поля. Теорема Гаусса

Для графічного зображення поля використовують *лінії вектора напруженості* які неточно називають *силовими лініями.*

Лінія вектора напруженості – це лінія, в кожній точці якої вектор напруженості напрямлений по дотичній у вказаному напрямку. Така лінія починається на позитивному заряді і закінчується на негативному, або на нескінченності

Кількість ліній, що замикаються на заряді, обирають у прямій пропорційності до заряду джерела, а густину ліній пропорційній напруженості поля в точках даної поверхні.

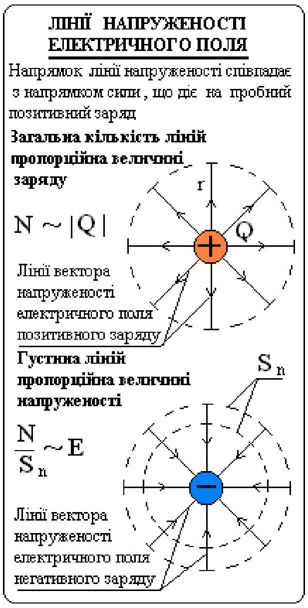


$$N \sim Q, \frac{N}{S_n} \sim E.$$

Отже, для характеристики модуля напруженості обирають поверхню, перпендикулярну лініям напруженості, та враховують кількість ліній вектора напруженості, які припадають на одиницю поверхні.

У випадку довільної поверхні оцінюється нормальна до неї складова напруженості.

$$\frac{N}{S} \sim E_n.$$



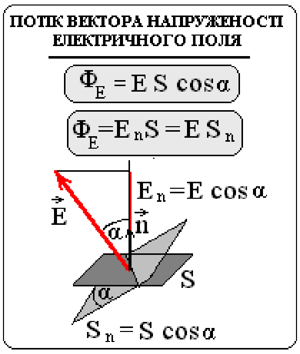
Для замкненої поверхні, що охоплює заряд

$$E_n S \sim Q.$$

Останній результат показує, що визначення заряду можна пов'язати з добутком площі поверхні на нормальну проекцію напруженості електричного поля, який називається *потоком вектора напруженості електричного поля* (Φ_E).

$$\Phi_E = E_n S = E S_n = E S \cos\alpha,$$

де α – кут між вектором напруженості поля та нормалі до поверхні.



Розглянемо сферичну поверхню радіусом r, в центрі якої знаходиться точковий заряд Q. Потік вектора напруженості через цю поверхню $S_m = 4\pi r^2$ буде

$$E_n S_m = k\frac{Q}{\varepsilon r^2} 4\pi r^2 = 4\pi k \frac{Q}{\varepsilon}.$$

Можна довести, що отриманий результат стосується довільної замкненої поверхні, і на цій основі сформулювати *теорему Гаусса*, яка стверджує, що потік вектора напруженості електричного поля через замкнену поверхню рівний сумарному заряду всередині поверхні, помноженому на $\frac{4\pi \cdot k}{\varepsilon}$.

4^0. Раціоналізація запису формул електростатики в СІ

Коефіцієнт $\frac{4\pi \cdot k}{\varepsilon}$ в записах теореми Гаусса навів на думку про можливість раціоналізованого запису формул електростатики. Записи стануть простішими якщо k розкласти на два множники $\frac{1}{4\pi}$ та $\frac{1}{\varepsilon_0}$ тоді буде $k = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0}$, де величина $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi 9 \cdot 10^9} \frac{Кл^2}{Нм^2}$ названа електричною сталою системи СІ, або діелектричною проникністю вакууму. Запровадивши ε_0, теорему Гаусса можна записати

$$\Phi_{Em} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

В такій формі теорема Гаусса стверджує, що *потік вектора напруженості електричного поля через замкнену поверхню рівний сумарному заряду всередині поверхні розділеному на відносну діелектричну проникність середовища та електричну сталу системи СІ.*

В існуючій літературі добуток $\varepsilon_0\varepsilon$ за традицією називають *абсолютною діелектричною проникністю речовини.*

Доповнення

1^0.Індукція електричного поля (електричне зміщення) та теорема Гаусса

Теорема Гаусса набуде простого вигляду, якщо ввести поняття вектора електричного зміщення (електричної індукції) формулою

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}.$$

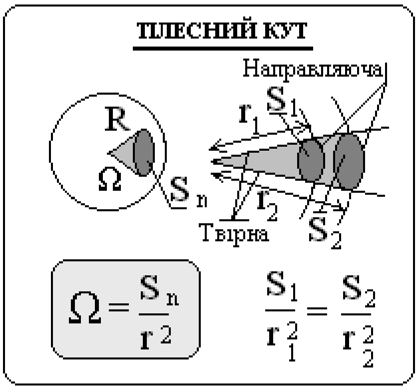
Потік вектора електричної індукції через замкнену поверхню буде рівним Q

$$\Phi_{Dm} = Q,$$

Маємо ще одну форму теореми Гаусса, за якою *потік вектора індукції і електричного поля через замкнену поверхню рівний сумарному заряду всередині поверхні .*

2^0.Доведення теореми Гаусса для випадку довільної поверхні

1)Тілесний кут



Розглянемо частину простору обмежену конічною поверхнею (зі замкненою направляючою), яка називається тілесним кутом.

За міру тілесного кута (Ω) приймається відношення площі S_n, яка вирізається з поверхні сфери конусом з вершиною в центрі цієї сфери до квадрата її радіуса r^2

$$\Omega = \frac{S_n}{r^2}.$$

Одиницею тілесного кута є стерадіан (ср). З означення величини кута Ω =1 ср при $S_n = r^2$. Отже *стерадіан – це центральний кут, який вирізає на поверхні сфери площу рівну квадрату радіуса цієї сфери.*

Максимальним тілесним кутом Ω_m є кут, якому відповідає поверхня всієї сфери $S_m = 4\,\pi\, r^2$

$$\Omega_m = \frac{S_m}{r^2} = \frac{4\,\pi\, r^2}{r^2} = 4\pi \cdot (\text{ср}).$$

2)Вираз потоку вектора напруженості поля точкового джерела через тілесний кут

Розглянемо потік через елементарну (скіль завгодно малу) поверхню. Потік через цю поверхню

$$\Phi_E = E_n\, S = E\, S_n = ES\cos\alpha.$$

Тут враховано, що потік можна обчислювати як за нормальною проекцією напруженості En, так і за нормальною поверхнею Sn, а кут α відлічується від зовнішньої нормалі до вектора напруженості. Отже елементарний потік

$$\Phi_{E\cdot i} = ES_n = \pm k\frac{|Q|}{\varepsilon r^2}S_n.$$

Врахувавши, що S_n є проекцією елементарної довільної поверхні на поверхню сфери, і є частиною (фрагментом) сферичної поверхні, можна виразити її через елементарний тілесний кут $\frac{S_n}{r^2} = \Omega$,

тоді

$$\Phi_{E\cdot i} = \pm\frac{k}{\varepsilon}|Q|\,\Omega.$$

Тут знак (+) беремо у випадку позитивного заряду і знак (–) – негативного $Q = \pm|Q|$.

Отже, потік вектора напруженості електричного поля через елементарну (скіль завгодно малу) поверхню – елементарний електричний потік

$$\Phi_{E\cdot i} = \frac{k}{\varepsilon}Q\Omega.$$

3)Теорема Гаусса

Електричний потік через довільну поверхню знаходиться методом розбиття даної поверхні на елементарні дільниці і подальшим сумуванням.

$$\Phi_E = \Phi_1 + \quad + \Phi_{n.,}$$

$$\Phi_E = \frac{k}{\varepsilon}Q\Omega_1 + \cdots + \frac{k}{\varepsilon}Q\Omega_n = \frac{k}{\varepsilon}Q(\Omega_1 + \cdots + \Omega_n) = \frac{k}{\varepsilon}Q\,\Omega.$$

Виходить, що електричний потік через довільну поверхню залежить лише від тілесного кута, під яким ця поверхня видна з точки джерела поля.

Розглянемо потік вектора напруженості поля точкового заряду через замкнену поверхню (Φ_m).

Сумуванням знайдемо

$$\Phi_{Em} = \frac{k}{\varepsilon} Q\Omega_m .$$

Оскільки максимальний тілесний кут (кут, під яким видна поверхня всієї сфери) Ω_m рівний 4π ср, то

$$\Phi_{Em} = \frac{4\pi \cdot kQ}{\varepsilon} .$$

Розглянемо електричний потік системи точкових зарядів $q_1,\dots,q_n$. Просумувавши потоки від кожного заряду окремо, матимемо

$$\Phi = \Phi_1 + \dots + \Phi_n = \frac{k}{\varepsilon} q_1\Omega + \dots + \frac{k}{\varepsilon} q_n\Omega = \frac{k}{\varepsilon}\Omega(q_1 + \dots + q_n) = \frac{k}{\varepsilon} Q\Omega .$$

Потік залежить від сумарного заряду.

Так як будь яке джерело поля можна розбити на точкові, то просумувавши повні потоки, матимемо

$$\Phi_{Em} = \frac{4\pi \cdot kQ}{\varepsilon} ,$$

де Q повний заряд всередині замкненої поверхні. Теорему Гаусса доведено.

3^0.Наведені міркування можна подати в позначеннях диференціального та інтегрального числення. Врахувавши, що повний потік напруженості електричного поля є сумою всіх частинних (елементарних) потоків $\Phi_{Em} = \sum_{i=1}^{n} E_{ni}\Delta S_i$ та перейшовши до границі при $n\to\infty$, отримаємо вираз повного потоку вектора напруженості через інтеграл по замкненій поверхні

$$\Phi_{Em} = \oint_S E_n dS .$$

Далі

$$\oint_S E_n dS = \oint_S E dS_n = \oint_S k\frac{Q}{\varepsilon r^2} dS_n = \oint_S k\frac{Q}{\varepsilon} d\Omega = k\frac{Q}{\varepsilon}\oint_S d\Omega = 4\pi k\frac{Q}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon} .$$

Врахувавши, що $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$, матимемо

$$\oint_S D_n dS = Q .$$

4^0.Поле зарядженої поверхні

Картина ліній поля зарядженої кулі за її межами повністю відповідає полю точкового джерела з таким же зарядом в центрі. Це дає право обчислювати напруженість електричного поля на відстані від центра кулі, більшій ніж її радіус (r >R де R – радіус кулі), за формулою точкового заряду

$$E = k\frac{|Q|}{\varepsilon r^2}.$$

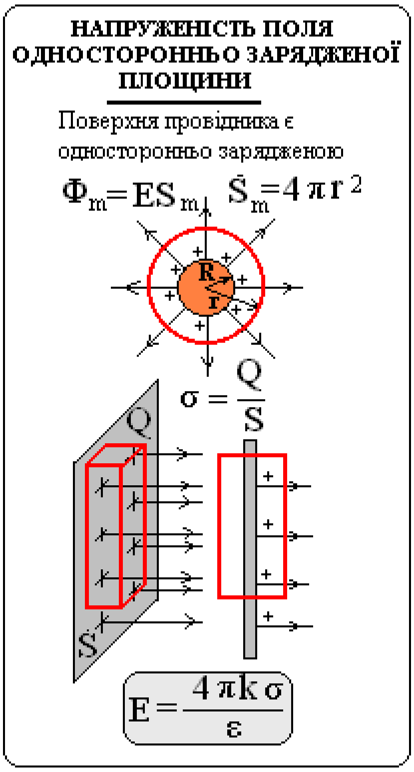
В тому числі, напруженість поля біля самої поверхні кулі ($r \approx R$) буде рівна

$$E = k\frac{|Q|}{\varepsilon R^2}.$$

і може бути виражена через поверхневу густину заряду (σ)

$$\sigma = \frac{|Q|}{4\pi \cdot R^2},$$

$$E = \frac{4\pi \cdot k\sigma}{\varepsilon}.$$



Очевидно, за цією формулою, можна розрахувати і поле площини, зарядженої з однієї сторони, враховуючи те, що площину можна уявити як сферичну поверхню безмежно великого радіуса кривизни. Причому остання формула не містить відстані до площини і повинна виражати напруженість поля площини не тільки в прилеглих до неї, а і в будь-яких точках.

До такого ж результату приводять і розрахунки за теоремою Гаусса.

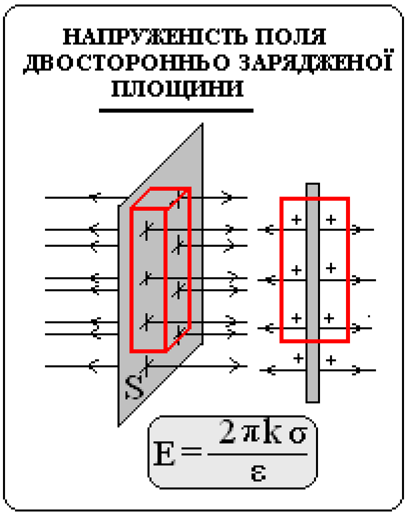
Дійсно. якщо в якості поверхні, що оточує кулю візьмемо концентричну їй сферу довільного радіуса r , то за теоремою Гаусса

$$\Phi_m = \frac{4\pi \cdot kQ}{\varepsilon}.$$

Так як $\Phi_m = E4\pi\, r^2$

то

$$E\frac{k|Q|}{r^2}.$$



Аналогічно, для двосторонньо зарядженої площини візьмемо оточуючу заряд оболонку у вигляді паралелепіпеда з площею основи S. Оскільки потік через бічну поверхню відсутній (тут не існує нормальної складової напруженості), то повний потік через оболонку

$$\Phi_m = 2ES.$$

За теоремою Гаусса

$$\Phi_m = \frac{4\pi \cdot kQ}{\varepsilon} = \frac{4\pi \cdot k\sigma \cdot S}{\varepsilon} \cdot$$

З останніх двох формул для двосторонньо зарядженої поверхні

$$E = \frac{2\pi \cdot k\sigma}{\varepsilon}, \text{ або } E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} \text{ (СІ).}$$

У випадку односторонньо зарядженої поверхні потік буде вдвоє меншим, так як поле існує з однієї сторони

$$E = \frac{4\pi \cdot k\sigma}{\varepsilon} \cdot$$

Інакше

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} \text{ (СІ).}$$